



GIUGNO 2023

I MODELLI BASATI SULLE SCORTE

#MICROSTRUCTURE



INDICE

INTRODUZIONE	3
MODELLI BASATI SULLE SCORTE – NEUTRALITA' AL RISCHIO	4
MODELLI BASATI SULLE SCORTE – AVVERSIONE AL RISCHIO	7
CONCLUSIONI	12
BIBLIOGRAFIA	13

Autori:

Mattia Calabrese

Giuseppe Carnazza

INTRODUZIONE

In questo paper analizzeremo i modelli che tengono conto del rischio in cui incorre il *Market Maker* per mantenere le scorte ed esamineremo come l'ampiezza dello spread possa remunerarli per tale rischio.

Nei mercati dove operano i *Dealer*, i *Market Maker* forniscono liquidità quotando continuamente i prezzi bid e ask e facendo profitti grazie allo spread. Questo meccanismo non è esente da rischi come il mancato bilanciamento del flusso di ordini di acquisto e di vendita. La mancanza di equilibrio fa sì che i *Market Maker* siano obbligati a mantenere delle posizioni di portafoglio che si discostino dalle loro posizioni ottimali.

Ma facciamo un attimo un passo indietro, diamo una definizione corretta e lineare di:

- *Traders*: operatori di mercato che portano a termine gli scambi sul mercato, si distinguono due categorie;
 - a) *Proprietary Traders*, compiono gli scambi per conto proprio, investendo il proprio capitale;
 - b) *Brokers*, agisce da intermediari eseguendo ordini per conto dei propri clienti;
 - c) *Trader motivati dai profitti*, scambiano unicamente quando prevedono verosimilmente di ottenere dallo scambio;
 - d) *Trader utilitaristi*, scambiano quando si aspettano dei benefici addizionali oltre i profitti.

Una sottocategoria dei trader utilitaristi sono gli *hedger*, ovvero coloro che cercano di compensare il rischio di possedere un titolo estremamente volatile.

- *Dealer*: comprano e vendono titoli inseguito alle richieste dei loro clienti, ovvero sono intermediari che agiscono come controparte negli scambi con i loro clienti andando a quotare i prezzi. Vengono chiamati *Market Makers* quando svolgono la funzione di garantire liquidità al mercato.

In questi modelli analizzeremo semplicemente la teoria non scendendo troppo nel quantitativo per andare a centrare l'obiettivo principale senza troppe complicazioni.

MODELLI BASATI SULLE SCORTE – NEUTRALITA' AL RISCHIO

Modello di Garman

Il prezzo di equilibrio è quello al quale la quantità domandata eguaglia quella offerta. Questa assunzione rappresenta una buona approssimazione di quello che succede nel mercato. Però è necessario sottolineare quanto il comportamento reale del mercato finanziario pone alcuni dubbi sull'utilità nel prevedere il reale andamento dei prezzi. Può verificarsi che gli ordini di acquisto e di vendita pervengano in momenti differenti, ciò causa diverse situazioni a cui questo modello cerca di rispondere: a quale arco temporale si riferiscono gli ordini di acquisto e di vendita, oppure come si riflette una variazione di prezzo sul flusso di ordini. Garman fu il primo ad affrontare il problema dello squilibrio delle scorte del dealer dovuto allo sbilanciamento nell'arrivo degli ordini di acquisto e vendita; infatti, in tale modello, un dealer monopolista assegna un prezzo di acquisto (p_a) ed un prezzo di vendita (p_b) a cui evade tutti gli ordini. Teniamo presente che ciascun ordine è di un'unità, infatti l'obiettivo del dealer è di massimizzare i profitti attesi, per ogni unità di tempo, evitando la bancarotta o il fallimento.

Da questa breve introduzione, capiamo che l'assunzione del modello è che l'arrivo degli ordini di acquisto e di vendita non siano sincronizzati, da qui la necessità di un dealer, ma arrivino in modo casuale seguendo una distribuzione di Poisson, con tassi che dipendono dai prezzi. Al market maker non è consentito prendere a prestito né titoli né denaro; dunque, la sua posizione in ogni intervallo di tempo sarà decisa dal tasso di arrivo degli ordini di acquisto e di vendita. L'obiettivo è quindi quello di predire quando il market maker fallirà. Con il passare del tempo la posizione monetaria del dealer cambia in base all'arrivo degli ordini. È questa dinamica ad essere importante per il dealer, poiché il dealer non ha modo di incrementare il suo capitale se non attraverso gli scambi.

Consideriamo il seguente scenario, supponiamo che il dealer ottenga un'unità del titolo con probabilità p e che ceda un'unità del titolo con probabilità q , con $p > q$. Poniamoci questa domanda, se il dealer ha una dotazione iniziale di S_0 titoli qual è la probabilità che al tempo t abbia esaurito i titoli, ovvero che fallirà?

Pr $[F/S]$ è la probabilità di fallire al tempo t data la dotazione iniziale di titoli S . Infatti, c'è una probabilità q che qualcuno acquisti un'unità del titolo, lasciando il dealer con $S - 1$ unità, ed una probabilità p che il dealer ottenga un'unità aggiuntiva del titolo.

$$\Pr[F|S] = q\Pr[F|S - 1] + p\Pr[F|S + 1]$$

La soluzione di questa equazione ci dà la probabilità attesa generale di fallimento

$$\Pr[F|S_0] = (q|p)^{S_0}$$

In questo contesto a prescindere dai prezzi che il dealer stabilirà, la probabilità di fallimento è sempre positiva. Non c'è modo cioè di evitare il fallimento.

Per evitare però tale fallimento, i dealer devono mantenere un prezzo bid-ask spread che soddisfi queste condizioni:

$$\begin{aligned} \lambda_a(p_a)p_a &> \lambda_b(p_b)p_b \\ \lambda_b(p_b) &> \lambda_a(p_a) \end{aligned}$$

Tuttavia, riconfermiamo il fatto che lo spread può solamente allontanare il fallimento, ma non può risolverlo perché la sua probabilità sarà sempre positiva.

Attenzione però, perché Garman offre più dettagli per il caso particolare in cui il dealer persegua una politica di zero scorte.

$$\lambda_b = \lambda_a$$

Commento: prezzi più bassi faranno aumentare la domanda e contrarranno l'offerta mentre prezzi più alti ridurranno la domanda e aumenteranno l'offerta. Di conseguenza il prezzo si ristabilizzerà ad un valore in grado di eguagliare la domanda e l'offerta. Se il dealer offre lo stesso prezzo ai compratori e ai venditori, l'equilibrio di mercato si ottiene quando l'intensità dell'arrivo degli acquisti eguaglia quella delle vendite:

$$\lambda_b(p_{eq}) = \lambda_a(p_{eq}) = \lambda_{eq}$$

Fintanto che le intensità di arrivo sono le stesse, il dealer sta acquistando e vendendo in media con la stessa intensità. Se il dealer sta acquistando e vendendo allo stesso prezzo, ovviamente i profitti sono zero. Se il dealer invece offre un prezzo ask a chi vuole comprare ed un prezzo bid a chi vuole vendere, il profitto medio per unità di tempo sarà:

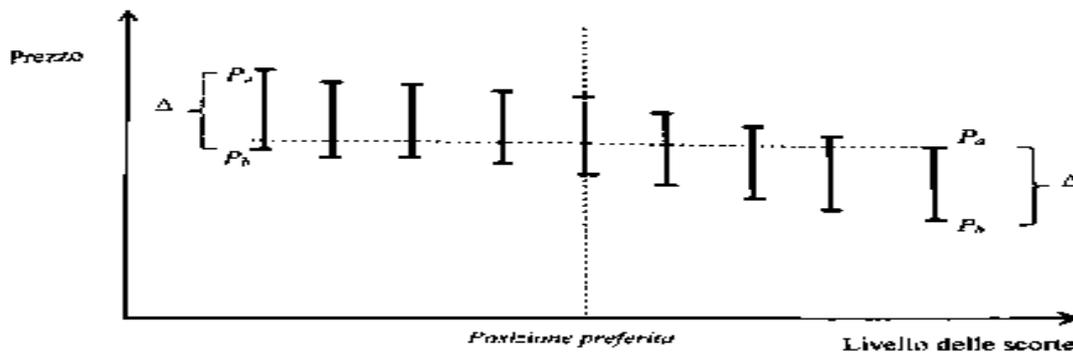
$$\pi(\text{Bid}, \text{Ask}) = (\text{Ask} - \text{Bid})^{\lambda_b} \times (\text{Ask}) = (\text{Ask} - \text{Bid})^{\lambda_a} \times (\text{Bid})$$

Modello di Amihud-Mendelson

Tale modello riformula il modello precedente, eliminando la semplificazione secondo cui il dealer decida i prezzi all'inizio e non li modifichi in base a cambiamenti del mercato; infatti, i prezzi dipendono dalle scorte del dealer (più precisamente il dealer presenta un livello ottimale di scorte ed un intervallo entro cui può deviare dal livello ottimale). È importante precisare che il dealer è monopolista e che gli ordini di acquisto e vendita

seguono una distribuzione di Poisson con intensità di arrivo in base ai prezzi bid e ask. Il modello considera funzioni di domanda e offerta lineari, tali che i prezzi bid e ask diminuiscono (aumentano) in modo monotonicamente quando le scorte aumentano (diminuiscono) rispetto al livello ottimale.

Analizziamo nel dettaglio la figura sottostante:



Fonte: “La microstruttura dei mercati finanziari”, Aut. Paola Paiardini

Qui viene mostrata la relazione tra la posizione delle scorte ed i prezzi bid-ask, in particolare:

- Il bid e l’ask sono funzioni monotone decrescenti dei livelli di scorte;
- Lo spread è positivo;
- Lo spread aumenta all’allontanarsi della posizione ottimale;
- I prezzi sono simmetrici rispetto al valore reale del titolo;

Da tale figura possiamo ricavare un’altra importante intuizione, ovvero il prezzo influenza gli squilibri delle scorte solo temporaneamente. Infine, la conclusione pratica del modello è che i dealer dovrebbero variare lo spread e il prezzo medio per mantenere il livello ottimale di scorte.

MODELLI BASATI SULLE SCORTE – AVVERSIONE AL RISCHIO

I modelli che vedremo in seguito si basano sull'assunzione che il dealer sia avverso al rischio. Nella teoria economica tradizionale la funzione di utilità della ricchezza è usata per quantificare il grado di avversione al rischio. Una delle funzioni di utilità maggiormente utilizzate per descrivere queste caratteristiche è la CARA (Constant Absolute Risk Aversion).

$$U(W) = -e^{-\alpha W}$$

$$CARA(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \alpha$$

Modello di Stoll

Nel modello di Stoll il *dealer* è semplicemente un partecipante al mercato, che è disposto a discostarsi dal suo portafoglio ottimale (CAPM) per soddisfare la domanda dei titoli da parte dei *trader*. Il *dealer* essendo avverso al rischio deve essere ricompensato per il fatto di sostenere il rischio stesso. Il costo del rischio sostenuto dal *dealer* è dato quindi dallo spread dei prezzi bid e ask. I costi ai quali il *dealer* va incontro nel fornire questo servizio immediato di liquidità sono di tre tipi:

- Costi di mantenimento delle scorte;
- Costi di evasione degli ordini
- Costi derivanti dagli scambi con *trader* che hanno maggiori informazioni del *dealer* stesso rispetto al titolo;

Stoll considera un modello a due periodi in cui il *dealer* esegue una transazione al tempo $t=1$ e liquida la posizione al tempo $t=2$. Il prezzo può variare tra i periodi di scambio, ma non all'interno di uno stesso periodo. Il *dealer* può prendere ea dare a prestito a un tasso privo di rischio, per cui non esiste bancarotta in questo modello. L'idea principale del modello di Stoll è che il *dealer* è disposto a eseguire una transazione solo se la sua utilità attesa, in seguito allo scambio, risulti quantomeno la stessa di quella che otterrebbe senza.

$$E[U(W)] = E[U(W_T)]$$

Il costo per i *dealer* nel fornire liquidità immediata al mercato aumenta se:

- la ricchezza iniziale e l'avversione al rischio sono maggiori;
- le scorte risultano essere più ampie;

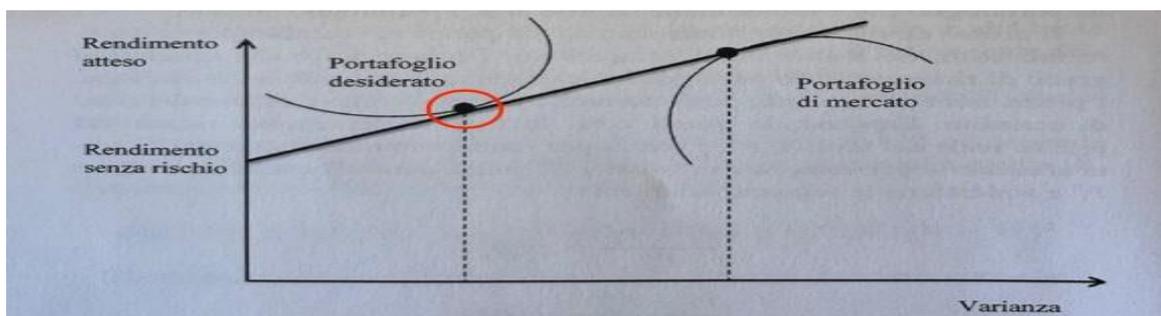
- aumentano le transazioni;

Infine, i costi sono influenzati anche dalla caratteristica dei titoli stessi (varianza e correlazione con altri titoli). Ciascuno di questi fattori influenza i costi che il *dealer* dovrà sostenere per accettare un portafoglio che è sub-ottimale rispetto al suo portafoglio iniziale. Il *dealer* dovrà essere ricompensato dai prezzi di scambio per sostenere tali costi; se il mercato è competitivo i prezzi bid e ask saranno in grado di ricompensarlo. I prezzi bid e ask possono essere espressi come funzione dei costi di scambio. Infatti, esprimendo questi costi in termini percentuali rispetto al prezzo reale del titolo i , P_i^* , i prezzi per vendere immediatamente Q_i^b unità al dealer o per comprare dal dealer Q_i^a unità, sono rispettivamente P_i^b e P_i^a e soddisfano le seguenti relazioni:

$$\frac{P_i^* - P_i^b}{P_i^*} = c_i(Q_i^b)$$

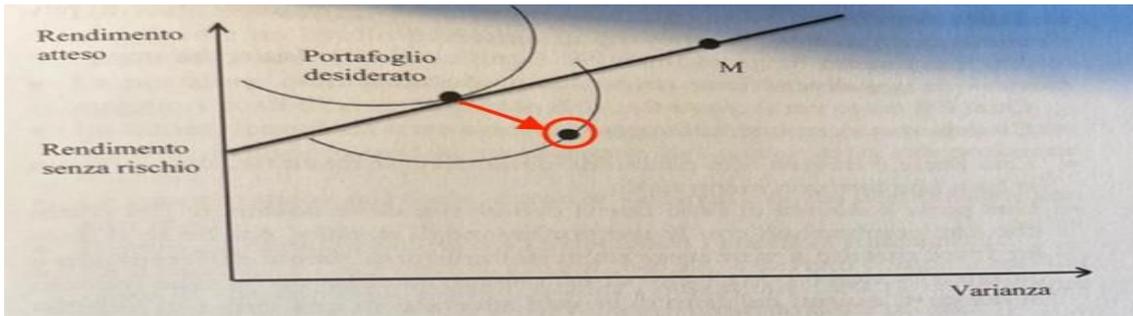
$$\frac{P_i^* - P_i^a}{P_i^*} = c_i(Q_i^a)$$

Una limitazione del modello di Stoll è che esso implica la liquidazione totale del titolo al tempo $t=2$. Partendo dal modello del CAPM, possiamo illustrare la situazione di partenza del *dealer*, che qui è considerato un intermediario, che ha una posizione desiderata di portafoglio.



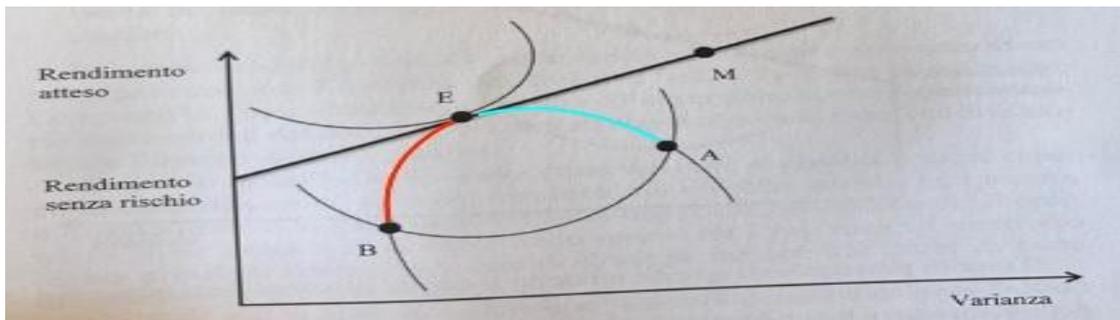
Fonte: “La microstruttura dei mercati finanziari”, Aut. Paola Paiardini

Accettando di spostarsi dalla sua posizione ottimale per soddisfare le richieste di scambio, il *dealer* si sposta su una posizione sub-ottimale, ovvero su una curva di indifferenza più bassa.



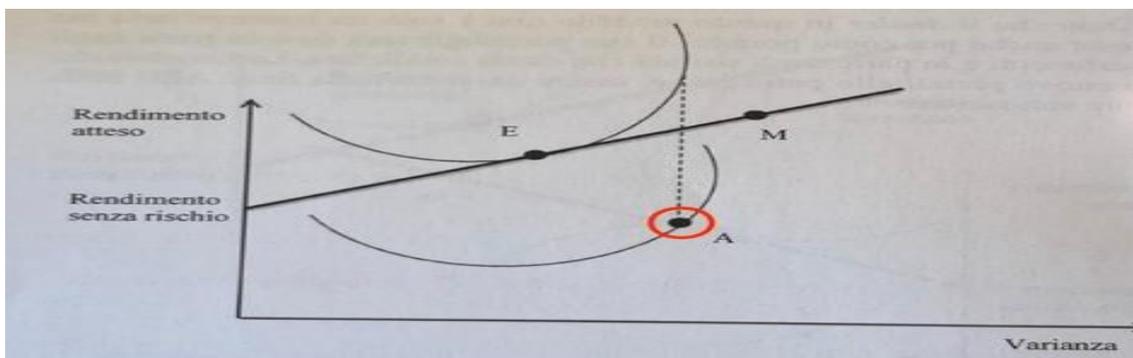
Fonte: “La microstruttura dei mercati finanziari”, Aut. Paola Paiardini

Dato che il *dealer* in questo modello non è solo un intermediario ma investe anche per conto proprio, il suo portafogli sarà dato in parte dagli investimenti e in parte dagli scambi che dovrà soddisfare. La frontiera del nuovo portafoglio potrà quindi essere descritta dalla linea AEB nella figura sottostante.



Fonte: “La microstruttura dei mercati finanziari”, Aut. Paola Paiardini

In questo grafico notiamo che ci sono due componenti di costo, una parte è dovuta alla riduzione della diversificazione, l'altra al fatto che il *dealer* ora deve sostenere dei rischi che non combaciano con le sue preferenze di rischio.



Fonte: “La microstruttura dei mercati finanziari”, Aut. Paola Paiardini

In conclusione, questo modello ha il merito di aver reso espliciti i costi di mantenimento delle scorte e la loro dimensione delle transazioni e con le altre variabili. Tuttavia, il modello non considera la dimensione intertemporale, introdotta invece nel modello successivo.

Modello di Ho e Stoll

Estende il modello di Stoll considerando periodi multipli in cui sia l'arrivo degli ordini, sia i rendimenti di portafoglio sono stocastici. Questo modello dimostra tre proprietà importanti sul comportamento ottimale del *dealer*:

- a. Lo spread dipende dall'orizzonte temporale del *dealer*. Al sopraggiungere della fine degli scambi si riduce il rischio che il dealer sostiene nello svolgere della sua funzione, poiché il tempo in cui egli dovrà sostenere dei rischi legati alle scorte è limitato. Non appena l'orizzonte temporale aumenta, lo spread aumenta a sua volta per compensare il *dealer* dai rischi legati alle scorte e al portafoglio;
- b. L'aggiustamento del rischio dipende dal coefficiente di avversione al rischio relativo del *dealer*, dalla dimensione della transazione, e dal rischio del titolo misurato dalla sua varianza. Ciò ci dice che l'incertezza delle transazioni di per sé non influenza lo spread; infatti, la variabilità delle stesse non ha un effetto diretto sul *dealer* ma influenza indirettamente le sue strategie di portafoglio;
- c. La qualifica di prezzo ideale è che lo spread sia indipendente dal livello delle scorte, tale caratteristica implica che lo spread non sia influenzato dal livello di scorte del *dealer* e neanche dal livello atteso di cambiamento delle scorte. Nonostante i prezzi individuale dipendano dalle scorte, il *dealer* influenza il processo di arrivo degli ordini spostando la posizione dello spread rispetto al valore reale del titolo, piuttosto che aumentando o diminuendo lo spread stesso. Quindi, ipotizzando un valore reale di 50€ il *dealer* può decidere dei prezzi bid e ask di 48€ e 52€ per il primo periodo. Se l'ordine successivo è un ordine di vendita il *dealer* aumenta le sue scorte, e modifica al ribasso entrambi i prezzi, ad esempio a 47€ e 51€ (di quanto il *dealer* decide di modificare i prezzi al ribasso dipende dal suo coefficiente relativo di avversione al rischio, dalla rischiosità del titolo e dalla sua ricchezza). In primo luogo, poiché il modello assume un orizzonte temporale finito, un'assunzione è che le scorte siano liquide ad un certo periodo futuro T .

Un'implicazione di tale comportamento è con i prezzi del *dealer* seguiranno un andamento deterministico. Ad esempio, se l'orizzonte temporale del *dealer* è rappresentato da una giornata di scambi lo spread sarà maggiore la mattina e si ridurrà stabilmente durante la giornata. Una seconda assunzione importante del modello è che esiste un valore reale del titolo che è fisso.

CONCLUSIONI

I modelli illustrati in questo capitolo rappresentano punti di vista differenti sull'andamento dei prezzi di mercato e dello spread. Tuttavia, in ogni modello basato sulle scorte, lo specialista deve affrontare il difficile compito di bilanciare le oscillazioni casuali tra flussi di entrata e flussi di uscita. Queste deviazioni sono indipendenti dal valore futuro del titolo ma, nel breve periodo, determinano il comportamento del mercato (nel lungo periodo invece sono irrilevanti). L'effetto del *dealer*, di conseguenza, sui prezzi è temporaneo, con prezzi che tenderanno al valore reale del titolo che prevale quando i flussi di ordini sono bilanciati.

BIBLIOGRAFIA

“La microstruttura dei mercati finanziari; Teorie, applicazioni ed esperimenti”, di Paola Paiardini (G. Giappichelli Editore)